トーリック多様体のK理論と凸多面体(変換群の理論とその応用)

AUTHOR(S):

西村, 保三

数理解析研究所講究録
第 1569 巻 2007 年 8-12

トーリック多様体のK理論と凸多面体

摂南大学・教育センター　西村 保三 (Yasuzo Nishimura)
Education Center,
Setsunan University

トーリック多様体がコンパクト・非特異の時，その上のアンプルな直線束に対して，凸多面体が対応する ([6, Chapter 2] 参照)。Morelli [4] はこれを，同変束がアンプルでない場合や一般次元のベクトル束の場合に拡張して，トーリック多様体の同変K理論から，凸多面体で生成される自由加群 (凸鎖) への単射を構成するという形で，その同変K理論を明らかにした。Morelli の写像の構成は，代数幾何的な手法に拠っているが，本稿ではこれを組合せ論の範疇で議論を行い，トーラス多様体のK理論について考察する。

1　トーリック多様体と扇・凸多面体

定義 1.1 トーラス $T=(\mathbb{C}^*)^n$ が作用する正規代数多様体は開で稠密な軌道があるときトーリック多様体と呼ばれる。

例 1.2 標準的なトーラス作用のもとで，ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$，射影空間 $\mathbb{C}P^n$ はトーリック多様体である。

格子 $N\cong\mathbb{Z}^n$ を固定し，原始整数ベクトル $v_i\in N$ $(i\in I)$ に対し，n 次元ベクトル空間 $N_{\mathbb{R}}=N\otimes\mathbb{R}$ の部分集合

$$\sigma=\angle v_I:=\{\sum_{i\in I}r_iv_i\mid r_i\geq 0\}$$

が直線を含まない時, (原点 O を頂点とする) N の凸錐という。

定義 1.3 原点 O を頂点とする N の凸錐の集まり Δ は以下の条件を満たす時，扇と呼ばれる。

1. $\sigma\in\Delta$ で τ が σ の面の時，$\tau\in\Delta$,
2. $\sigma,\tau\in\Delta$ の時，$\sigma\cap\tau$ は σ の面。

トーラス $T=(\mathbb{C}^*)^n$ に対し，その表現群を $\hat{T}\cong\mathbb{Z}^n$，その双対を $\hat{T}^0=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{\mathrm{T}},\mathbb{Z})$ と表す。

定理 1.4 $\hat{T}^0$ 上の扇の圏と n 次元トーリック多様体の圏は同型である。

扇 Δ に対応するトーリック多様体を X_Δ と表すことにする。トーリック多様体 X_Δ のコンパクト性・非特異性は扇の言葉で次のように言い換えられる。

命題 1.5 1．X_Δ がコンパクトである必要十分条件は，Δ が完備すなわち $|\Delta| := \cup_{\sigma\in\Delta}\sigma = \hat{T}^0_{\mathbb{R}}$ が成り立つことである。

2．X_Δ が非特異である必要十分条件は，Δ の任意の凸錘が $\mathbb{Z}$-基底で生成されることである。

以下トーリック多様体はコンパクトで非特異の時を考える。この時，扇 Δ の１次元錘の集合 $\Delta(1) := \{\sigma \in \Delta \mid \dim\sigma = 1\}$ に整数値を対応させる“台関数”$h : \Delta(1) \to \mathbb{Z}$ に対して，トーリック多様体 X_Δ 上の同変直線束 E_h の同型類が一対一に対応する。また扇 Δ と双対関係にある $\hat{T}$ の（整）凸多面体 $\mathcal{P}_h := \{x \in \hat{T}_{\mathbb{R}} \mid (v_i, x) \le h_i\}$ が定義できる（注：潰れたり空集合になることもあり得る）。r 次元錘 $\sigma = \angle v_I \in \Delta(r)$ に対して，多面体 $\mathcal{P}_h$ の σ に対応する面を $F_\sigma := \{x \in \hat{T}_{\mathbb{R}} \mid (v_i, x) = h_i\ (i \in I)\} \subset \mathcal{P}_h$ と表す。

命題 1.6 (Demazure) 凸多面体 $\mathcal{P}_h$ が $\{F_\sigma \mid \sigma \in \Delta(n)\}$ を互いに異なる頂点とする n 次元（単純）凸多面体であることと，E_h がアンプルな直線束であることは同値である。またこのようなものが存在するのは，X_Δ が射影的すなわち射影空間に埋め込める時である。

定義 1.7 格子 $N \cong \mathbb{Z}^n$ を固定し，$N_{\mathbb{R}}$ の整凸多面体の特性関数で生成される自由加群を

$$L(N) := \{\sum_{i=1}^{k} n_i \mathbf{1}_{P_i} \mid n_i \in \mathbb{Z},\ P_i : \text{整凸多面体}\} \subset \mathrm{Map}(N_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z})$$

と表す。また $L(N)$ の平行移動による格子群 N の作用による商群を $\mathcal{L}(N) := L(N)/N$ で表す。$L(N)$, $\mathcal{L}(N)$ の元は凸鎖と呼ばれる（[7] 参照）。

整凸多面体 P, Q に対して，Minkowski 和 $P + Q := \{x + y \mid x \in P,\ y \in Q\}$ を用いて，$\mathbf{1}_P \cdot \mathbf{1}_Q = \mathbf{1}_{P+Q}$ として $L(N)$ には積が定義される。また λ-作用素を $\lambda_t(\mathbf{1}_P) = 1 + \mathbf{1}_P \cdot t$ によって定めることで λ-環構造が定義される。

トーリック多様体 X_Δ 上の同変ベクトル束 E に対してコホモロジー群 $H^i(X_\Delta, E)$ にトーラスが作用し，重みによる分解 $H^i(X_\Delta, E) \cong \oplus_{m\in\hat{T}} H^i(X_\Delta, E)_m$ が得られる。Euler 標数の重み m 成分 χ_m を $\chi_m(E) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X_\Delta, E)_m$ で定義する。

定理 1.8 (Morelli [4]) 次式で定義される写像 $I_T : K_T(X_\Delta) \to L(\hat{T})$ 及び I_T からトーラス作用を無視して導かれる写像 $I : K(X_\Delta) \to \mathcal{L}(\hat{T})$ は λ-環の単射準同型写像である。

$$I_T(x)(m/k) = \chi_m(\Psi^k(x)) \quad (x \in K_T(X_\Delta),\ m \in \hat{T},\ k \in \mathbb{N})$$

注意 1.9 $h : \Delta(1) \to \mathbb{Z}$ に対応するアンプルな直線束 E_h に対して，$I_T([E_h]) = \mathbf{1}_{\mathcal{P}_h}$ である。

直線束に関して I_T の準同型性は容易に確かめられるので，$K_T(X_\Delta)$ がアンプルな直線束の類で生成されている場合は（例えば射影空間），$I_T([E_h]) = \mathbf{1}_{\mathcal{P}_h}$ の式から逆に λ-環の準同型写像 $I_T : K_T(X_\Delta) \to L(\hat{T})$ が構成できる。

2 トーラス多様体のK理論と凸鎖

まず服部-枡田 [2] で定義されたトーラス多様体と多重扇を紹介する。

定義 2.1 M は向き付け可能かつ滑らかな $2n$ 次元閉多様体で，効果的なトーラス $T=(S^1)^n$ 作用があり，固定点集合 M^T は有限個の孤立点とする。M の余次元 2 の部分閉多様体が表現的とは，ある S^1 部分群で各点毎に固定される連結成分であり，少なくとも一つ固定点を含む時をいう。M とその全ての表現的部分多様体 $M_1,\cdots,M_d$ に向きが固定された時，M をトーラス多様体と呼ぶ。

例 2.2 コンパクトで非特異なトーリック多様体は，トーラス多様体である。

定義 2.3 格子 $N\cong\mathbb{Z}^n$ を固定する。Σ を唯一の最小元を持つ有限な半順序集合，$I\in\Sigma$ に対して格子 N の凸錐 $C(I)$ が対応して，次の条件を満たすとする。
(1) $C(\min\Sigma)=\{O\}$;
(2) $I\leq J$ $(I,J\in\Sigma)$ のとき，$C(I)$ は $C(J)$ の面;
(3) 任意の $J\in\Sigma$ に対し，$\{I\in\Sigma\mid I\leq J\}$ は $C(J)$ の面束と半順序集合として同型。
このとき $\Sigma^{(k)}:=\{I\in\Sigma\mid\dim C(I)=k\}$ を k 次元錐の集まりを表す記号として，上記に 2 つの“重み写像” $w^{\pm}:\Sigma^{(n)}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を加えた 3 つ組 $\Delta=(\Sigma,C,w^{\pm})$ を多重扇と呼ぶ。

例 2.4 Δ を通常の扇とする時，$\Sigma=\Delta$, $C=\mathrm{id}$, $w^+=1$, $w^-=0$ と考えれば $\Delta=(\Delta,\mathrm{id},w^{\pm})$ は多重扇である。

命題 1.5 に関して，多重扇の非特異性は扇の時と同様に定義される。完備性は [2, §2] で定義されている（本稿では省略)。トーラス多様体に対して，完備で非特異な $\hat{T}^0$ の多重扇が対応するが，トーリック多様体の場合と違い，この対応は一対一ではない。

定義 2.5 完備で非特異な多重扇 $\Delta=(\Sigma,C,w^{\pm})$ と 1 次元錐に対し整数値を定める“台関数” $h:\Sigma^{(1)}\to\mathbb{Z}$ の組 $\mathcal{P}=(\Delta,h)$ （あるいはこの写像で決まる $N^0_{\mathbb{R}}$ の超平面アレンジメント $F_i=\{x\in N^0_{\mathbb{R}}\mid (x,v_i)=h_i\}$ $(i\in\Sigma^{(1)},\ C(i)=\angle v_i)$ の組 $\mathcal{P}=(\Delta,F)$）を多重多面体という。

トーラス多様体 M 上の同変直線束 E に対して，その第 1 Chern 類を使って $c_1^T(E)=\sum_i h_i\xi_i$ ($\xi_i\in H^2_T(M)$ は表現的部分多様体 M_i の Poincare 双対類）によって台関数 $h:\Sigma^{(1)}\to\mathbb{Z}$ を定めて多重多面体 $\mathcal{P}=(\Delta,h)$ が対応する。

通常の完備・非特異な扇 Δ の場合は，台関数 $h:\Delta(1)\to\mathbb{Z}$ に対して同変直線束 E_h がアンプルな場合には $\hat{T}$ の整凸多面体 $\mathcal{P}_h$ がうまく対応した。[5] ではこの構成を工夫して，一般の多重多面体 $\mathcal{P}$ に対して，凸鎖 $\overline{DH_{\mathcal{P}}}\in L(\hat{T})$ を組合せ論の範疇で構成した。

非特異（完備とは限らない）な多重扇 Δ と台関数 $h:\Sigma^{(1)}\to\mathbb{Z}$ の組 $\mathcal{P}=(\Delta,h)$ を固定する。$I\in\Sigma^{(n)}$ に対し，対応する n 次元凸錘を $C(I)=\angle v_I$ とすると，多重扇の非特異性から $\{v_i\in\hat{T}^0 \mid i\in I\}$ は $\mathbb{Z}$-基底であり，また $F_I:=\cap_{i\in I}F_i$ は格子 $\hat{T}$ 上の点である。$C(I)$ の双対錘を $C(I)^0=\angle_{i\in I}u_i^I\subset\hat{T}_{\mathbb{R}}$（ただし $\{u_i^I\}$ は $\{v_i\}$ の双対基底すなわち $(v_j,u_i^I)=\delta_{ij}$ である）と表し，F_I を頂点とする凸錘を $U(I):=F_I+(-C(I)^0)$ とおいて，多重多面体 $\mathcal{P}$ に対して，凸錘の特性写像で生成される自由加群の元（錘鎖）を

$$\alpha(\mathcal{P}):=\sum_{I\in\Sigma^{(n)}}(w^+(I)-w^-(I))\mathbf{1}_{U(I)}$$

と定義する。ここで一般的なベクトル $\eta\in\hat{T}_{\mathbb{R}}^0$ を任意に固定すると，[7, Theorem 1] により次の条件を満たす錘鎖 $\overline{DH}_{\mathcal{P},\eta}$ が一意に決まり，$\alpha(\mathcal{P})$ の η に関する簡約表現と呼ばれる。

(1) $\overline{DH}_{\mathcal{P},\eta}$ を生成する任意の凸錘 C について，$\eta|C$ は頂点で最小値を取る；

(2) $\alpha(\mathcal{P})-\overline{DH}_{\mathcal{P},\eta}$ は直線を含む錘の特性関数で生成される錘鎖である。

簡約表現 $\overline{DH}_{\mathcal{P},\eta}$ が η の取り方に依らないこととそれが有限な台を持つ（すなわち凸鎖になる）こと，及び Δ が完備であることは同値である（[5, Proposition 3.4] 参照）。

定義 2.6 多重多面体 $\mathcal{P}=(\Delta,h)$ に対して決まる凸鎖 $\overline{DH}_{\mathcal{P},\eta}$（$\eta$ に依らない）を $\overline{DH}_{\mathcal{P}}$ と表し，Duistermaat-Heckman 関数と呼ぶ。

注意 2.7 1．Δ が完備・非特異な扇，台関数 $h:\Delta(1)\to\mathbb{Z}$ で決まる同変直線束 E_h がアンプルのとき，$\mathcal{P}=(\Delta,h)$ を多重多面体と考えると $\overline{DH}_{\mathcal{P}}=\mathbf{1}_{\mathcal{P}_h}=I_T([E_h])$ である。

2．Karshon-Tolman [3] では，多様体に同変閉 2-形式 ω が存在するが潰れてもよい（潰れていない場合は Delzant の結果よりトーリック多様体になる）プレシンプレクティック・トーリック多様体の場合に，同変直線束に対して，モーメント写像を拡張して凸鎖 $\overline{DH}_{\mathcal{P}}\in L(\hat{T})$ と同様の概念を定義し「振れ多面体」と呼んでいる。

$\mathcal{P}$ がトーラス多様体 M 上の同変直線束 E で決まる多重多面体とする。Duistermaat-Heckman 関数は，$K_T(M)$ の演算と可換なので，$K_T(M)$ が同変直線束の類で生成されていれば，$\overline{DH}$ を拡張して λ-環準同型写像 $I_T:K_T(M)\to L(\hat{T})$ およびトーラス作用による商から $I:K(M)\to\mathcal{L}(\hat{T})$ が構成できる。

トーラス多様体 M が次の条件 $(*)$ を満たすときを考える。

$(*)$ トーラス多様体 M のコホモロジー環 $H^*(M)$ は次数 2 の元で生成される。

このとき，M の同変コホモロジー環は，Δ の Stanley-Reisner 環 $\mathbb{Z}[\xi_1,\cdots,\xi_d]/\langle\prod_{i\in I}\xi_i \mid I\notin\Sigma\rangle$ と同型になる（[2, Proposition 9.2] 参照）。またこのとき，M_i に対応する標準同変直線束の類 ν_i

(s.t. $c_1^T(\nu_i) = \xi_i$) は $K_T(M)$ を生成することがわかるので，λ-環の準同型写像 $I_T : K_T(M) \to L(\hat{T})$ 及び $I : K(M) \to \mathcal{L}(\hat{T})$ が構成できる。さらに Morelli による定理 1.8 の単射性の証明もほぼそのまま適用でき，次の定理が成り立つ。

定理 2.8 トーラス多様体 M は条件 $(*)$ を満たすとする（例えば擬トーリック多様体 [1]）。このとき λ-環準同型写像 $I_T : K_T(M) \to L(\hat{T})$ 及び $I : K(M) \to \mathcal{L}(\hat{T})$ は単射である。

注意 2.9 擬トーリック多様体のK理論は，コホモロジー環と同様の（Δ の Stanley-Reisner 環をあるイデアルで割るという）表示ができることが [8] で証明されている。

参考文献

[1] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Covex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417–451.

[2] A. Hattori and M. Masuda, *Theory of multi-fans*, Osaka J. Math. **40** (2003), 1–68.

[3] Y. Karshon and S. Tolman, *The moment map and line bundles over presymplectic toric manifolds*, J. Differential Geometry **38** (1993), 465–484.

[4] R. Morelli, *The K theory of toric variety*, Advances in Math. **100** (1993), 154–182.

[5] Y. Nishimura, *Multipolytopes and Convex chains*, Proceedings of the Steklov Institute of Math. **252** (2006), 212–224.

[6] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer-Velag, Berlin/New York (1985).

[7] A. V. Pukhlikov and A. G. Khovanskii, *Finitely additive measures of virtual polytopes*, Algebra Anal. **4-2** (1992), 161–185 [St. Petersburg Math. J. **4-2** (1993), 337–356].

[8] P. Sankaran and V. Uma, *K-theory of Quasi-Toric Manifolds*, Osaka J. Math. **44** (2007), 71–89.